数理解析研究所講究録
929巻 1995年 41-52

フーリエ解析の非可換化への最近95年間の歩み
ーPlancerel 公式より顧みるー

職業能力開発大学校(Polytechnic University)
佐野 茂 (Shigeru SANO)

§1 歴史的背景

今日フーリエ解析とよばれる理論は19世紀に熱伝導の研究から生まれた。これらの成果はフーリエにより1822年に著作 (Théorie analytique de la chaleur) として出版されている。 のちにリーマンやルベーグらにより基礎づけがなされた。この理論は可換群上での調和解析と考えられるが、20世紀にはいって非可換群や等質空間上で対応する理論を展開しようという試みがなされて来た。本稿ではこの歩みを振り返りながら現在進行中の内容まで述べてみたい。

1° コンパクト群 $T=R/2\pi Z$ 上の区分的に滑らかな連続関数 f にたいし

$$\mathcal{F}^{n}(f)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

$$f(y)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}^{n}(f)\, e^{iny}$$

2° 非コンパクト群 R 上の区分的に滑らかな連続関数で絶対可積分関数 f にたいし

$$\mathcal{F}^{\nu}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\nu x}\, dx$$

$$f(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}^{\nu}(f)\, e^{i\nu y}\, d\nu$$

ここで注意しなければいけないのは単に連続性だけでなく微分可能性も含めたディリクレ条件が必要になる事である。 このことから群の演算が解析的であるリー群で考えることにする。リー群上では各点で接空間が考えられるが、群の結合法則は単位元の接空間でヤコビ律となる。ベクトル空間でヤコビ律を満足するものをリー環といい、これで群の局所的な内容を捕えることができる。非可換群（半単純リー群）はこのリー環をもちいて20世紀初頭にカルタンにより分類された。ここから非可換群上の調和解析が始まる。

基底関数をどうあたえるか可換群の場合を参考にする。 $\phi_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ とおくと次ぎを満足する。

(C 1) $\phi_\lambda(x+y) = \phi_\lambda(x)\phi_\lambda(y)$

(C 2) $\Delta\phi_\lambda(x) = \lambda(\Delta)\phi_\lambda(x)$ （Δ はラプラシアン ）

そこでリー群 G からヒルベルト空間V上の自己同型変換への写像Tで関数方程式

(N 1) $T_{xy} = T_x T_y$ $(x, y \in G)$

を満足するものを基底に考えるのが自然である。この解{T, V}をGの表現と呼ぶ。表現{T, V}が {0} とV以外にT-不変な部分空間をもたないとき既約という。既約表現は最も基本な表現である。またヒルベルト空間の内積を保つ表現をユニタリ表現という。式で書くと

(N 1)$^{\mathrm{bis}}$ $(T_x v, T_x w) = (v, w)$ $(x \in G,\ v, w \in V)$

となる。これは正規化された表現といえよう。G の既約ユニタリ表現の同値類全体の集合を $\hat{G}$ とする。既約ユニタリ表現を分類するのは大切な問題となる。条件(C 2)は次のように定式化できる。リー群Gのリー環を $\mathfrak{g}$ とする。$\mathfrak{g}$ の展開環を$U(\mathfrak{g})$ とし、$U(\mathfrak{g})$の中心を $\mathfrak{z}$ とおく。このとき $\mathfrak{z}$ から C への準同型写像λが存在して

(N 2) $T_Z v = \lambda(Z)v$ （$v \in V$ 解析的ベクトル、$Z \in \mathfrak{z}$）

を満足する。解析的方法が有効なのが分かる。

1° コンパクト連結群の有限次元表現論

コンパクト連結群(U(n)、SO(n)、Sp(n) 等) の既約表現は有限次元となり、カルタンにより最高ウエートの理論(1913年)、ワイルによる指標公式(1925年)、ピーター・ワイルの定理(1927年)等の結果が得られている。

定理 (最高ウエート定理) コンパクト連結線形簡約群Gのリー環を $\mathfrak{g}$ とする。$\mathfrak{g}$ の最大可換部分リー環を $\mathfrak{b}$ とし対応するGの部分群をBとする。ルート系 $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ に辞書的順序を入れ正のルート系を Σ^{+} とおく。Σ^{+} の単純ルート系を $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ とする。このときドミナントで解析的整な $\mathfrak{b}_c^{*}$ の元 λ に対して G の既約有限次元表現 π_λ で次を満足するものが一意に決まる。

(1) λ を最高ウエートにもち、その固有空間は1次元となる。

(2)任意のウエートは

$$\lambda - \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i \qquad (m_i \in Z^{+})$$

で与えられる。

定理(指標公式) Gをコンパクト半単純単連結群とする。ドミナントで解析的整な $\mathfrak{b}_c^{*}$ の元 λ に対応して λ を最高ウエートとする既約有限次元表現 π_λ の指標 Φ_λ は

$$\Phi_\lambda(t) = \frac{\sum_{w \in W} (\det w)\, \xi_{w(\lambda+\rho)}(t)}{\Delta(t)} \qquad (t \in T)$$

で次元は

$$d_\lambda = \frac{\prod_{\alpha > 0} \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}{\prod_{\alpha > 0} \langle \rho, \alpha \rangle}$$

となる。

定理 (ピーター・ワイルの定理) Gをコンパクト連結群とする。

(1) G の既約ユニタリ表現は有限次元になる。

(2) G ユニタリ表現は有限次元既約不変部分空間の直和になる。
(3) $\{\pi, V_\pi\} \in \hat{G}$ とV_πの正規直交基底$\{\phi_j\}$をとると

$\sqrt{d(\pi)}\ (\pi(g)\phi_j, \phi_k)$　　は$L^2(G)$の正規直交系をなす。

さらにこれは完全基底となり次式で表せる

$$L^2(G)=\overline{\sum_{\pi\in\hat{G}}\sum_{1\le j,k\le d(\pi)} C\ (\pi(g)\phi_j, \phi_k)}$$

また表現の構成も具体的に与えられ多くの成果が得られた。この非可換コンパクト群の有限次元表現論の非コンパクト化は色々と試みられたが一筋縄では行かなかった。簡単な例を上げてみる。

G = SL(2,R) とし2次の同次多項式からなるベクトル空間を V とする。表現 T を

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)p\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = p\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \qquad p\in V$$

で定義する。いま V の元 $q=(z_2)^2$ をとる。このとき表現 T の行列成分 $(T(g)q,q)$が $L^2(G)$ に入るかどうかを見る。G の任意の元 g は

$$k_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad a_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

により $g = k_\phi a_t k_\theta$ とCartan分解される。この分解を使って G のハール測度を与えて計算する

$$\int_G |(T(g)q,q)|^2 dg = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi} |(T(k_\phi a_t k_\theta)\ q,q)|^2 \sinh 2t\ d\phi\, dt\, d\theta$$

$$= \pi^2\int_0^{\infty} \sinh 4t\ dt = \infty$$

となり $L^2(G)$ に入らない。ワイルのユニタリトリックを用いてコンパクト群の表現との関係をみる。

コンパクト群　SU(2)　⊂　SL(2,C)　⊃　SL(2,R)　非コンパクト群

SU(2)の有限次元ユニタリ表現はSL(2,C)の正則表現となりSL(2,R)では有

限次元非ユニタリ表現となる。この対応は表現の同値性や不変部分空間の関係を保つ。ピーター・ワイルの定理の非コンパクト化を考えるとき、このユニタリトリックから対応するSL(2,R)の有限次元表現の行列成分が $L^2(G)$ に入るかどうかは自然な問いである。上の例はこのような方法では非コンパクト化は困難であることを示している。

この壁を乗り越えるためには物理学者による既製概念にとらわれない研究が必要であった。1947年のゲルファンド・ナイマルクによる$SO_0(3,1)$やバルグマンの$SO_0(2,1)$の仕事により無限次元表現論が始まった。

2° 非コンパクト簡約リー群の無限次元表現論

簡約群GL(n,C), SL(n,R), SO(p,q), U(p,q)等の有限次元表現は自明表現を除いてにユニタリ化できない、ここでの解析には無限次元表現が必要となってくる。特に行列成分が $L^2(G)$ に入る既約ユニタリ表現を離散系列表現といい重要である。最高ウエートの理論に対応して、1966年にハリシチャンドラにより離散系列表現が無限小指標とK-タイプにより特徴づけられた。続いてこの離散系列表現の構成が1976年にシュミットによりなされ、さらに指標公式は平井により1981年に大域的に与えられた。これはワイルの指標公式の非コンパクト化にあたる。プランシェル公式は1976年にハリシチャンドラにより与えられた。

G を連結な簡約線形群としその中心 Z_G はコンパクトとする。群 G のリー環を $\mathfrak{g}$ とし、カルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とする。K を G の $\mathfrak{k}$ に対応する極大コンパクト群とする。$\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} K$ を仮定する。コンパクトカルタン部分環 $\mathfrak{b}$ がとれる、対応する G の解析的部分群を B とする。ルート系$\Sigma(\mathfrak{b}_c, \mathfrak{g}_c)$の正のルート系を$\Sigma^+$とする。$\Sigma^+$の内でコンパクトルートの全体を$\Sigma_K{}^+$そうでないルート全体を$\Sigma_n{}^+$とする。$G$ の部分集合 A が与えられたときその正則な元全体を A' とおく。

定理(ハリシチャンドラ) $(i\mathfrak{b})^*$の元λで条件 (i)λは正則でドミナント、(ii)$\lambda+\rho_G$ は解析的整、を満足するものをとる、このとき次の性質を満足する離散系列表現π_λが一意に決まる。

(1)π_λは無限小指標χ_λをもつ

(2)π_λを K に制限すると K の既約表現で分解されるが、$\Lambda = \lambda+\rho_G-2\rho_K$ を最高ウエートにもつ既約表現を重複度 1 でもつ。さらにこの分解にでてくる任意の表現の最高ウエートは$\Lambda + \sum_{\alpha>0} n_\alpha \alpha$ ($n_\alpha \geq 0$ 整

数)で与えられる。

(3)表現π_λの指標をΦ_λとする。このΦ_λは G 上で超関数として定義されるが、G′では解析関数となる。コンパクトカルタン部分群 B 上では

$$\Phi_\lambda(b) = \frac{(-1)^q \sum_{w \in W_G} (\det w) \xi_{w\lambda}(b)}{\Delta(b)} \qquad (b \in B')$$

となる。ここで $q = \dim G/K$ 。

この定理により離散系列表現が特徴づけられた。このような B 上の指標をもつ既約表現をどう構成するか、また大域指標をどう与えるかが問題となった。

G の複素化を G_c とする。コンパクトカルタン部分環 $\mathfrak{b}$ とそのルート空間 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ からなるリー環 $\mathfrak{g}_c$ の楕円型部分環 $\mathfrak{b}_c+\sum_{\alpha>0}\mathfrak{g}_{-\alpha}$ に対応するG_cの解析的部分群をP_cとする。$G \cap P_c = B$ となり複素構造をG/BにG_c/P_cより入れる。$\mathfrak{b}_c{}^*$の解析的整な元λを無限指標とする B 上の指標ξ_λをとる。これを P_c に拡張して正則直線束 $G/P_c \leftarrow G_c \times_B C_\lambda$ を考える。これを引き戻して G/B 上の直線束を得る。G/B 上の二乗可積分調和 $(0,q)$ 形式全体を $H^q(\mathcal{L}_\lambda)$ とする。また k を

$k=|\{\alpha \in \Sigma_K{}^+ : \langle \lambda+\rho_G, \alpha \rangle < 0\}| + |\{\alpha \in \Sigma_n{}^+ : \langle \lambda+\rho_G, \alpha \rangle > 0\}|$

とおく

定理(シュミット) $\langle \lambda+\rho_G, \alpha \rangle \neq 0$ $(\alpha \in \Sigma+)$とする。このとき $q \neq k$ の場合 $H^q(\mathcal{L}_\lambda) = 0$ となるが $q = k$ の場合 $H^q(\mathcal{L}_\lambda) \neq 0$ となり離散系列表現となる。

次ぎに指標を与える。$\mathfrak{j}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環で $\mathfrak{b}$ とケーリー変換で移るとする。すなわち実ルートの強直交系 $F=\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}$をとれ$\nu_F = \nu_{\alpha 1}\nu_{\alpha 2}...\nu_{\alpha s}$ とおくと $\mathfrak{b} = \nu_F(\mathfrak{j}_c) \cap \mathfrak{g}$.

定理(平井) $E_1, E_2, ..., E_r \in \mathrm{Mor}(\Sigma_R{}^+(A))$ を F に随伴する標準系全体とする。このとき離散系列表現の指標は

$$\Phi_\lambda(j) = (-1)^q \ \varepsilon(\lambda) \sum_{i=1}^{r} \frac{\varepsilon(E_i)\ Z(j:E_i, \lambda, \Sigma_R{}^+(A))}{\Delta(j:\Sigma+(\mathfrak{j}))}$$

$$Z(j:E,\lambda,\Sigma_R^+(A)) = \sum_{s\in W_G(\mathfrak{b})} \mathrm{sgn}(s) \sum_{u\in W(\Sigma_R(A))} \mathrm{sgn}_E(\lambda)\ \xi_\lambda(j_u)$$
$$\times \exp\lambda(P_F(u^{-1}X)\prod_{\alpha\in F}\exp\{-\alpha(u^{-1}X)|(\lambda,\nu_F\alpha)/|\alpha|^2\}$$
$$j = j_u \exp X \in J'$$

この指標をもちいてプランシェル公式が与えられる。この後理論は代数化、精密化、多様化、アフィン化などの流れで深化してきている。以下の節でアフィン化の流れからプランシェル公式を述べる。

§2 簡約対称空間上の調和解析

ここではアフィン化の流れに沿い最近の結果を述べる。先の節で述べた多くの成果の位置づけも明らかになって来る。

G をH-Cクラスの簡約リー群とし、σ を G の対合的自己同型とする。σ により不変な G の元全体を G^σ としその単位元を含む連結成分を G^σ_0 とする。Gの閉部分群 H で $G^\sigma_0 \subset H \subset G^\sigma$ を満足するものをとり、対称空間 G/H を与える。この対称空間の放物型部分群に付随した構造分解を考える。この分解に従ってフーリエ変換を定義する。

$\mathfrak{a}_\mathfrak{q}$ をθ-不変な $\mathfrak{q}$ のカルタン部分空間とする。$\mathfrak{j}$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}_\mathfrak{q}$ を含む θ,σ-不変なカルタン部分環で $\mathfrak{p}$ 部分最大ものとする。$\mathfrak{j}$ に対応して放物型部分群を与えそこからの誘導表現を考える。この誘導表現は次の補題より $\mathfrak{j}$ のとり方によらないことが分かる。

補題2.1 $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}_\mathfrak{q}$ を含む θ,σ-不変なカルタン部分環で $\mathfrak{p}$ 部分最大ものとする、このとき $K_H = K\cap H$ の元 k を適当にとると $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{j}_2$ となる。

ここで $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = \mathfrak{j}\cap\mathfrak{p}$, $L = Z_G(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ そして $X(L) = \mathrm{Hom}(L, R^\times)$ とおく。また

$$M = \bigcap_{\chi\in X(L)} \mathrm{Ker}|\chi|,\quad A_\mathfrak{p} = \exp\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$$

と定義すると、$L = MA_\mathfrak{p}$, $M\cap A_\mathfrak{p} = \{e\}$ となる。ルート系$\Sigma(\mathfrak{a}_\mathfrak{p},\mathfrak{g})$ に $\mathfrak{h}$-コンパテブルな辞書式順序をいれ $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha>0}\mathfrak{g}^\alpha$ 、$N = \exp\ \mathfrak{n}$ とおき G の放物型部分群 $P = MA_\mathfrak{p}N$ を与える。部分空間 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ に従ってワイル群 W とその部分群 W_H を

$$W = N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a}),\quad W_H = N_{K\cap H}(\mathfrak{a})/Z_{K\cap H}(\mathfrak{a})$$

としその商を $W^* = W/W_H$ とする。また $w \in W$ に対して $N^w = w^{-1}(N)w$, $P^w = MA_\mathfrak{p}N^w$ とおく。

命題2.2 放物部分群 P に付随して次のように分解できる。

$$\bigcup_{w \in W^*} K_H w P^w H \subset G/H$$

は開軌道の直和で稠密になる。

$\mathfrak{a}_\mathfrak{q}^1, \mathfrak{a}_\mathfrak{q}^2, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{q}^n$ を K_H により互いに共役にならない $\mathfrak{q}$ のカルタン部分空間の極大系とする。$\mathfrak{a}_\mathfrak{q}^k$ に対応して G の放物型部分群 P^k やワイル群 W^k, W_H^k を上述のようにとり $W_k^* = W^k/W_H^k$ とおく。ラグランジュ分解 $P^k = M_k A_\mathfrak{p}^k N_k$に対応してフーリエ変換を軌道分解を用いて定義する。

rank M_k = rank $M_k \cap K$ より M_k には離散系列表現が存在する。$E_d(M_k/M_k \cap H)$ を $M_k \cap H$-不変な元をもつ離散系列表現の同値類全体の集合とする。各 $E_d(M_k/M_k \cap H)$ の元ωに対応して、$L^2(M_k/M_k \cap H)$ の M_k-不変部分空間 V_ω がとれる。σ_ω を射影球超関数

$$\sigma_\omega : L^2(M_k/M_k \cap H) \longrightarrow V_\omega$$

とする。$A_\mathfrak{p}^k$の$A_\mathfrak{p}^k \cap H$-不変ベクトルをもつユニタリ表現は$\nu \in (i\,\mathfrak{a}_k)^*$により与えられる。$A_k = \exp \mathfrak{a}_k$、$M_k^* = M_k/M_k \cap H$、$(N_k^w)^* = N_k^w/N_k^w \cap H$ とおく。$X(W_k^*)$をW_k^*から$\{\pm 1\}$ への写像εで$\varepsilon(1^*)=1$を満足するもの全体とする。放物型部分群 P^k に沿ったフーリエ変換を $\sigma_\omega, \nu, \varepsilon (\in X(W_k^*))$ に対して

$$\mathcal{F}^{\omega,\nu,\varepsilon,k}(f)$$
$$= \sum_{w^* \in W_k^*} \int_{K_H} \int_{M_k^* \times A_k \times (N_k^w)^*} f(kmanH)\ \sigma_\omega(m) \exp(-\nu \log a)\, \varepsilon(w)\ dk\,dm^*da\,dn^*$$

で定義する。ここで $X(W_k^*)$ に関する和をとり

$$\mathcal{F}^{\omega,\nu,k}(f) = \sum_{\varepsilon \in X(W_k^*)} \mathcal{F}^{\omega,\nu,\varepsilon,k}(f)/|X(W_k^*)|$$

とおく。これは表現の重複度を表す。G/H上でのフーリエ変換を

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}^{\omega,\nu,k}(f)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{K_H} \int_{M_k^* \times A_k \times N_k^*} f(kmanH)\ \sigma_\omega(m) \exp(-\nu \log a) \varepsilon(w)\ dkdm^* dadn^*$$

で定義する。このとき次ぎの式が予想される。

プランシェル公式(予想) 測度$\mu(\sigma_\omega, \nu)$が存在して、任意の $f \in C_c^\infty(G/H)$に対して次式が成立する。

$$f(eH)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\omega \in \hat{E}_d(M_k/M_k \cap H)} \int_{\nu \in (i\,\mathfrak{a}_k)^*} \mathcal{F}^{\omega,\nu,k}(f) \mu(\sigma_\omega, \nu)\ d\nu$$

上の式の関数空間はもっと広くとれるが分かりやすいのでこうしている。以下の節でプランシェルの定理がすでに知られている対称空間についてこの式との対応を与える。

§3 G/K上の調和解析

G をH-Cクラスの簡約リー群とし。K を G の極大コンパクト部分群とする。非コンパクトリーマン対称空間 G/K で考える。$\mathfrak{g}$ を G のリー環とし、$\mathfrak{k}$ を K に対応する $\mathfrak{g}$ の部分リー環とする。カルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とし、$\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる。ルート系$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{g})$より正のルート系$\Sigma^+$を与える。関数$f \in C_c^\infty(G/K)$をK-右側不変な G 上の関数とみなす。

$$\mathcal{F}^\nu(f)$$

$$= \int_K \int_{M \times A \times N} f(kman) e^{-\nu \log a}\ dkdmdadn$$

$$= \int_G f(g) e^{-(\nu+\rho) \log(a)}\ dg$$

$$= \int_G f(g) \int_K e^{-(\nu+\rho)\log a(gk)} dk\ dg$$

$$= \int_G f(g)\phi_\nu(g)dg$$

ただし、ここで$\phi_\nu(g) = \int_K e^{-(\nu+\rho)\log a(gk)}dk$ は球関数である。

この球関数は次ぎの関係式で特徴づけられる

(1)$\phi_\nu(e) = 1$

(2)$\phi_\nu(kgk') = \phi_\nu(g) \qquad (\forall k, \forall k' \in K)$

(3)$D\phi_\nu = \nu \cdot \gamma(D)\phi_\nu \qquad (\forall D \in D(G/K))$

定理(ハリシチャンドラ) 任意の $f \in C_c^\infty(G/K)$ に対して

$$f(eK) = [W]^{-1}\int_{(i\,\mathfrak{a})^*} \mathcal{F}^\nu(f)|c(\nu)|^{-2}d\nu$$

ただし

$c(\nu) = I(i\nu)/I(\rho)$,

$I(\nu) = \prod_{\lambda \in \Sigma^+} B(m(\lambda)/2,\ m(\lambda/2)/4-(\nu,\lambda)/(\lambda,\lambda))$。

またこの非コンパクトリーマン対称空間では「不変微分作用素の同次固有関数は佐藤の超関数のポワソン変換で表せる」というヘルガソン予想が証明されている。

§4 群多様体

G_0 をH-Cクラスの簡約対象リー群とし、その積を $G = G_0 \times G_0$ とおく。σ を G の$\sigma(g,h) = (h,g)$ $(g,h \in G_0)$ なる対合的自己同型とし $H = G^\sigma$ とおく。群多様体 G_0 は対称空間 G/H と同一視できる。G_0 のリー環を $\mathfrak{g}_0$ とおくと $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$ は G のリー環となる。K_0 を G_0 の極大コンパクト部分群とし、対応する $\mathfrak{g}_0$ の部分リー環を $\mathfrak{k}_0$ とカルタン対合θ_0 とする。$K = K_0 \times K_0$ は G の極大コンパクト群になる。

$\mathfrak{a}_0$ をθ_0-不変な $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環とし、$\mathfrak{q}$ のカルタン部分空間 $\mathfrak{a}_\mathfrak{q} = \{(X,-X) : X \in \mathfrak{a}_0\}$ をとる。$\mathfrak{a}_\mathfrak{q}$ に対応して§2と同様にして G の放物型部分

群 P をとると、G_0 の適当な放物型部分群 P_0 により $P = P_0 \times P_0$ と表せる。

$\mathfrak{a}_0^1, \mathfrak{a}_0^2, \ldots, \mathfrak{a}_0^n$ を $\mathfrak{g}_0$ のカルタン部分環で K_0 の作用で互いに共役にならない極大系とする。$\mathfrak{a}_q^j = \{(X, -X) : X \in \mathfrak{a}_0\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ とおく。$\mathfrak{a}_q^1, \mathfrak{a}_q^2, \ldots, \mathfrak{a}_q^n$ は $\mathfrak{q}$ の K_H により互いに共役にならないカルタン部分空間の極大系となる。

$\mathfrak{a}_q^j$ に対応して G の放物型部分群 $P^j = P_0^j \times P_0^j$ をとる。P^j のラグランジュ分解 $P^j = M^j A^j N^j$ は P_0^j のラグランジュ分解 $P_0^j = M_0^j A_0^j N_0^j$ をもちいて $M^j = M_0^j \times M_0^j$, $A^j = A_0^j \times A_0^j$, $N^j = N_0^j \times N_0^j$ と与えられる。$M^j \cap H$ 不変ベクトルをもつ M^j の離散系列表現は M_0 の離散系列表現 ω_0 を適当にとると $\omega = \omega_0 \otimes \omega_0^*$ で与えられる。

$$\mathcal{F}^{\omega, \nu, k}(f)$$

$$= \int_{K_H} \int_{(M^k)^* \times A^k \times (N^k)^*} f(kmanH)\, \sigma_\omega(m^*) \exp(-\nu \log a)\; dk\, dm^* da\, dn^*$$

$$= \int_{K_H} \int_{M_0^k \times A_0^k \times N_0^k} f((k_0, k_0)(m_0, 1)(a_0, a_0^{-1})(n_0, 1)H)$$
$$\sigma_\omega((m_0, 1)^*) \exp(-\nu \log(a_0, a_0^{-1}))\; dk_0 dm_0 da dn_0$$

$$= \int_{K_H} \int_{M_0^k \times A_0^k \times N_0^k} f((k_0 m_0 a_0^2 n_0 k_0^{-1}, 1)H)$$
$$\sigma_\omega((m_0, 1)^*) \exp(2(-\nu_0 + \rho_0) \log a_0)\; dk_0 dm_0 da dn_0$$

$$= \int_{K_H} \int_{M_0^k \times A_0^k \times N_0^k} f((k_0 m_0 a_0 n_0 k_0^{-1}, 1)H)$$
$$\sigma_{\omega 0}((m_0, 1)^*) \exp((-\nu_0 + \rho_0) \log a_0)\; dk_0 dm_0 da_0 dn_0$$

$$= \quad d(\omega_0)\ \mathrm{Tr}\ \pi_{\omega 0, \nu 0}(f)$$

ただし、ここで表現 $\pi_{\omega 0, \nu 0}$ は P_0^k から G_0 の誘導表現

$$\pi_{\omega 0, \nu 0} = \mathrm{Ind}_{P_0^k \uparrow G_0}\ \omega_0 \otimes \nu_0 \otimes 1$$

である。

また G_0 と G/H を対応 $g \to (g, 1)H$ により同一視している。このとき M_0 の離散系列 ω_0 の指標と $M/M \cap H$ の射影球超関数 σ_ω とは形式次元 $d(\omega_0)$ を除いて一致し、予想の式はハリシチャンドラが与えたプランシェル公式になる。